Adı Soyadı: Numarası: 01.02.2022

2021-2022 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a) $(a, b)=1$ ise $(a+b, a-b)$ hangi değerleri alabilir?

b) $f:\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$, $f(\bar{a})=3\bar{a}$ fonksiyonu tanımlanıyor. f 'nin çekirdeğini bulunuz ve f birebir olur mu? Belirleyiniz.

2) a) G bir grup ve H, G 'nin alt grubu olsun. Bu durumda $a \in G$ olmak üzere $T=\{aha^{-1} : h \in H\}$ kümesi G 'nin alt grubu olur mu? Belirleyiniz.

b) G bir grup $M=\{x \in G : x^2 \in H\}$ için $H \triangleleft G$ ise $M \triangleleft G$ olur mu? Belirleyiniz.

3) a) $\mathbb{Z}^*_{18}$ grubu devirli olur mu? Belirleyiniz.

b) $G=\langle a \rangle$ devirli bir grup olsun. H, G 'nin alt grubu olmak üzere H da devirlidir, gösteriniz.

4) a) S_8 de $\alpha=(1\ 4)(5\ 6\ 8)(3\ 7\ 1)(1\ 2\ 3)$ permütasyonu veriliyor. $o(\alpha)$ 'yı ve $M(\alpha)$'yı bulunuz.

b) $G=\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ de $H=\langle(\bar{0},\bar{2})\rangle$ alt grubu veriliyor. Bu durumda G/H 'nın bütün elemanlarını bulunuz.

5) $H \cap K \triangleleft H$ ve $K \triangleleft HK$ olduğu bilindiğine göre

$$H/H \cap K \cong HK/K$$

olduğunu Homomorfizma Teoreminden faydalanarak gösteriniz.

NOT: Sınav süresi 100 dakika olup soruların herbiri eşit puanlıdır. İstediğiniz sorudan başlayabilirsiniz.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahtarı

1) a) $((a+b), a-b) = d$ olsun.

Ebob tanımından

$d \mid a+b$ ve $d \mid a-b \Rightarrow d \mid a+b+a-b \wedge d \mid a+b-a+b$

$\Rightarrow d \mid 2a \quad \wedge d \mid 2b$

$\Rightarrow d \mid (2a, 2b)$

$\Rightarrow d \mid 2$

$\Rightarrow d = 1$ veya $d = 2$ olabilir

b) $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$, $f(\bar{a}) = 3\bar{a}$ fonksiyonu için

Çek f'in tanımlı olması için f'nin homomorfizma olması gerekir $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_8$ için

$f(\bar{a}+\bar{b}) = f(\overline{a+b}) = 3(\overline{a+b})$
$= 3(\bar{a}+\bar{b})$
$= 3\bar{a}+3\bar{b}$
$= f(\bar{a})+f(\bar{b})$ yani f homomorfizmadır. O halde

$Çek f = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_8 \mid f(\bar{a}) = \bar{0}\}$
$= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_8 \mid 3\bar{a} = \bar{0}\}$
$= \{\bar{0}, \bar{4}\}$ olup $Çek f \neq \{\bar{0}\}$ old. f birebir değildir.

2) a) $T \leq G$ olması için öncelikle

$T \neq \emptyset$: G bir grup ise $e \in G$ vardır. $H \leq G \Rightarrow e \in H$ dır

O halde $aea^{-1} \in T \Rightarrow e \in T$ olup $T \neq \emptyset$

$T \subseteq G$: $\forall aha^{-1} \in T \Rightarrow h \in H \Rightarrow h \in G \Rightarrow \underbrace{a}_{\in G}\underbrace{h}_{\in G}\underbrace{a^{-1}}_{\in G} \in G$

olup $T \subseteq G$ dir.

$\forall ah_1a^{-1}, ah_2a^{-1} \in T$ için

$(ah_1a^{-1})(ah_2a^{-1})^{-1} = (ah_1a^{-1})(ah_2^{-1}a^{-1})$
$= ah_1(a^{-1}a)h_2^{-1}a^{-1}$
$= a\underbrace{h_1h_2^{-1}}_{H \leq G \text{ old. } \in H}a^{-1} \in T$ olup $T \leq G$ dir.

2b) $M \trianglelefteq G$ olması için öncelikle $M \leq G$ olmalıdır

$M \neq \phi$: G grup old $e \in G$ $H \trianglelefteq G \Rightarrow e \in H$

$\Rightarrow e^2 \in H$

$\Rightarrow e \in M$

$M \subseteq G$: Tanımdan açıktır

$M \leq G$: $\forall x, y \in M$ için $x^2 \in H, y^2 \in H$

$(xy^{-1})^2 = x^2 (y^2)^{-1} \in H \Rightarrow xy^{-1} \in M$ olur

$M \trianglelefteq G$: $\forall g \in G$ $\forall x \in M$ için $gxg^{-1} \in M$ olmalıdır

$x \in M \Rightarrow x^2 \in H$ olup

$$(gxg^{-1})^2 = (gxg^{-1})(gxg^{-1})$$

$$= g\underbrace{x^2}_{\in H} g^{-1} \in H \Rightarrow gxg^{-1} \in M$$

$H \trianglelefteq G$

Yani $M \trianglelefteq G$ olur

3 a) $\mathbb{Z}_{18}^* = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}\}$ olup

$o(\bar{1}) = 1$

$\left.\begin{array}{l} \bar{5}^2 = \bar{7} \\ \bar{5}^3 = \overline{17} \\ \bar{5}^4 = \overline{13} \\ \bar{5}^5 = \overline{11} \\ \bar{5}^6 = 1 \end{array}\right\}$ $o(\bar{5}) = 6 \Rightarrow |\bar{5}| = |\mathbb{Z}_{18}^*|$ old.

$\mathbb{Z}_{18}^*$ devirli bir gruptur

b) $G = \langle a \rangle$ ve $H \leq G$ olsun. $H = \{e\} \Rightarrow H$ devirlidir. $H \leq G$

$H \neq \{e\}$ ve $n \neq 0$ tam sayısı için $a^n \in H$ olsun. $H \leq G$ old $a^{-n} \in H$ dır. $n > 0$ o.ü $a^n \in H$ alalım.

Pozitif tam sayılar iyi sıralı old. $a^s \in H$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı s olsun. Bu durumda $H = \langle a^s \rangle$ old. gösterelim. $a^s \in H$ ve $H \leq G \Rightarrow \langle a^s \rangle \subset H$

Tersine $a^n \in H$ olsun. $n = qs + r$, $0 \leq r < s$, $\exists r, q \in \mathbb{Z}$

$a^n = (a^s)^q a^r \Rightarrow a^r = a^n (a^s)^{-q} \in H$ bulunur

$a^r \in H$ olması ancak $r = 0$ ile mümkündür. Yani

$a^n = (a^s)^q \in \langle a^s \rangle \Rightarrow H \subset \langle a^s \rangle$ olur. O halde

$H = \langle a^s \rangle$ elde edilmiş olur

4) a) S_8 de $\alpha=(14)(568)(371)(123)$ permütasyonunu ayrık devirler olarak yazalım.

$\alpha=(1\,2\,7\,4)(3)(5\,6\,8)$ yani

$\alpha=(1\,2\,7\,4)(5\,6\,8)$

$o(\alpha)=[4,3]=12$

$M(\alpha)=\{\beta\in S_8 \mid \beta\alpha\beta^{-1}=\alpha\}$

$(\beta(1)\beta(2)\beta(7)\beta(4))(\beta(5)\beta(6)\beta(8)) = (1274)(568)$

12 eleman

$= (2741)(568)$
$= (7412)(568)$
$= (4127)(568)$
$= (1274)(685)$
$= (2741)(685)$
$= (7412)(685)$
$= (4127)(685)$
$= (1274)(856)$
$= (2741)(856)$
$= (7412)(856)$
$= (4127)(856)$

$M(\alpha)=\{I,(1274),(17)(24),(1472),(17)(24)(568),$
$(568),(1274)(568),(17)(24)(568),(1274)(586),$
$(1472)(568),(586),(1274)(586),$
$(17)(24)(586),(1472)(586)\}$

4) b) $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3 \Rightarrow |G|=6$

$H=\langle(\bar0,\bar2)\rangle=\{(\bar0,\bar2),(\bar0,\bar1),(\bar0,\bar0)\}\Rightarrow |H|=3$

$|G|=[G:H]\cdot|H| \Rightarrow [G:H]=2$ Yani

G/H'nın eleman sayısı 2 dir

$G/H=\{(\bar a,\bar b)+H \mid (\bar a,\bar b)\in G\}$

$=\{\underbrace{(\bar0,\bar0)}_{\in H}+H,\ \underbrace{(\bar0,\bar1)}_{\in H}+H,\ \underbrace{(\bar0,\bar2)}_{\in H}+H,\ (\bar1,\bar0)+H,\ \underbrace{(\bar1,\bar1)+H}_{(\bar1,\bar0)+\underbrace{(\bar0,\bar1)+H}_{H}},$
$\underbrace{(\bar1,\bar2)+H}_{(\bar1,\bar0)+\underbrace{(\bar0,\bar2)+H}_{H}}\}$

$=\{H,(\bar1,\bar0)+H\}$

5) Homomorfizma Teoremi için

$$f: H \longrightarrow HK/K$$

$$h \to f(h) = hkK = hK$$ ile tanımlayalım

f iyi tanımlıdır: $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 = h_2$ olsun.

$$h_2^{-1} h_1 = h_1^{-1} h_1 = e \in K \Rightarrow h_1 K = h_2 K$$

$$\Rightarrow f(h_1) = f(h_2)$$

f homomorfizmadır; $\forall h_1, h_2 \in H$ için

$$f(h_1 h_2) = h_1 h_2 K$$

$$= (h_1 K)(h_2 K)$$

$$= f(h_1) \cdot f(h_2)$$

f örtendir: $\forall hkK \in HK/K$ için $hk \in HK$

$\Rightarrow h \in H$ ve $k \in K$ old. $f(h) = hkK = hK$

o.ş $\exists h \in H$ vardır

$$H/\text{Çek} f \cong HK/K$$

$$\text{Çek} f = \{h \in H \mid f(h) = K\}$$

$$= \{h \in H \mid hK = K\}$$

$$= \{h \in H \mid h \in K\}$$

$$= \{h \in H \mid h \in H \wedge h \in K\}$$

$$= \{h \mid h \in H \cap K\}$$

$$= H \cap K$$

$$H/H \cap K \cong HK/K$$